Propriété

Soit n et k deux entiers tels que $(1 \leqslant k < n)$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Démonstration

1ère méthode

Considérons un ensemble E ayant n éléments, et choisissons un élément particulier a.

$\binom{n}{k}$ correspond au nombre de parties de E ayant k éléments.

Soit F l'ensemble E auquel on retire l'élément a. F est alors un ensemble possédant $n-1$ éléments.

Parmi les parties de E ayant k éléments, on peut considérer les parties qui contiennent l'élément particulier a et les parties qui ne contiennent pas a.

Les parties de E ayant k éléments et qui contiennent l'élément a, contiennent aussi $(k-1)$ éléments différents de a, c'est-à-dire $(k-1)$ éléments de l'ensemble F.
On a donc autant de parties de E ayant k éléments et qui contiennent l'élément a, que de parties de F ayant $(k-1)$ éléments, c'est-à-dire $\binom{n-1}{k-1}$.

Les parties de E ayant k éléments et qui ne contiennent pas l'élément a, sont des parties à k éléments de l'ensemble F.
On a donc autant de parties de E ayant k éléments et qui ne contiennent pas l'élément a, que de parties de F ayant k éléments, c'est-à-dire $\binom{n-1}{k}$.

Il y a donc dans E, $\binom{n-1}{k-1}$ parties à k éléments contenant a et $\binom{n-1}{k}$ parties à k éléments ne contenant pas a.

Il y a donc en tout $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ parties de E à k éléments. Donc $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

2ème méthode

On sait que pour tous les entiers n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n$ on a $\binom{n}{k} = \dfrac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!}$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)\,!}{(k-1)\,!\,(n-1-(k-1)\,)\,!} + \frac{(n-1)\,!}{k\,!\,(n-1-k)\,!} \\
&= \frac{(n-1)\,!}{(k-1)\,!\,(n-k)\,!} + \frac{(n-1)\,!}{k\,!\,(n-1-k)\,!} \\
&= \frac{k \times (n-1)\,!}{k \times (k-1)\,!\,(n-k)\,!} + \frac{(n-1)\,! \times (n-k)}{k\,!\,(n-1-k)\,! \times (n-k)} \\
&= \frac{k \times (n-1)\,!}{k\,!\,(n-k)\,!} + \frac{(n-1)\,! \times (n-k)}{k\,!\,(n-k)\,!} \\
&= \frac{k \times (n-1)\,! + (n-1)\,! \times (n-k)}{k\,!\,(n-k)\,!} \\
&= \frac{(n-1)\,!\,[\,k + (n-k)\,]}{k\,!\,(n-k)\,!} \\
&= \frac{(n-1)\,! \times n}{k\,!\,(n-k)\,!} \\
&= \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!} = \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

Donc $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.