Propriété (théorème des gendarmes)

- Soient trois fonctions f, g et h définies sur un intervalle $]a\,;+\infty[$
  Si pour tout $x \in\ ]a\,;+\infty[$ $\quad g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

Démonstration

- Soient f, g et h trois fonctions définies sur $]a\,;+\infty[$ telles que :
  pour tout $x \in\ ]a\,;+\infty[$, $\quad g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$

  Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ.

  Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$, I contient tous les valeurs de $g(x)$ pour x assez grand ($x > x_1$).

  Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$, I contient tous les valeurs de $h(x)$ pour x assez grand ($x > x_2$).

  Soit X le plus grand des réels x_1 et x_2.

  Alors, pour tout $x \geqslant \mathrm{X}$, on a $\quad g(x) \in \mathrm{I}$ et $h(x) \in \mathrm{I}$

  Comme I est un intervalle et que $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, alors $f(x) \in \mathrm{I}$

  Donc I contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

  On a donc démontré que tout intervalle ouvert I contenant ℓ, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

  Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$