Exercice 36 Méthode d'Euler

1°) f est une fonction dérivable en x_0.

On sait que : pour h "petit", $f(x_0 + h)$ a pour approximation affine $f(x_0) + h\,f'(x_0)$.

Application : pour obtenir une approximation affine de $\dfrac{1}{1+h}$ pour h "petit", on pose $f(x) = \dfrac{1}{x}$

On a alors $\dfrac{1}{1+h} = f(1+h)$. Donc $\dfrac{1}{1+h}$ a pour approximation affine $f(1) + h\,f'(1)$

On sait que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ donc $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. Par conséquent $f(1) = 1$ et $f'(1) = -1$.

Donc $\dfrac{1}{1+h}$ a pour approximation affine $1 - h$.

On peut vérifier avec une calculatrice : on a par exemple $\dfrac{1}{1,0003} \approx 0,9997$

2°) f vérifie $f(0) = 0$ et $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

a) On a $f'(0) = \dfrac{1}{1+0^2}$ donc $f'(0) = 1$.

Pour h "petit" $f(h) = f(0+h)$ a pour approximation affine $f(0) + h\,f'(0)$.
Donc $f(h)$ a pour approximation affine $0 + 1 \times h = h$.
On en déduit que $f(0,1) \approx 0,1$.
Sur l'intervalle $[0 ; 0,1]$, on considère que $f(h)$ a pour approximation affine h.
On représente $f(h)$ pour $h \in [0 ; 0,1]$.
Puisqu'il s'agit d'une approximation affine, la représentation graphique est une droite.
Elle passe par les points de coordonnées $(0 ; 0)$ et $(0,1 ; 0,1)$. (C'est la droite d'équation $y = x$)

b) $f'(0,1) = \dfrac{1}{1+0,1^2}$ donc $f'(0,1) = \dfrac{1}{1,01}$ D'après la première question on a $f'(0,1) \approx 0,99$

On suppose que $f(0,1) = 0,1$.
Alors pour h "petit" $f(0,1+h)$ a pour approximation affine $f(0,1) + h\,f'(0,1)$
Donc $f(0,1+h)$ a pour approximation affine $0,1 + 0,99\,h$.
On en déduit, en prenant $h = 0,1$ que $f(0,2) \approx 0,1 + 0,99 \times 0,1$ donc $f(0,2) \approx 0,199$

c) On peut remplir le tableau suivant (3 chiffres après la virgule)

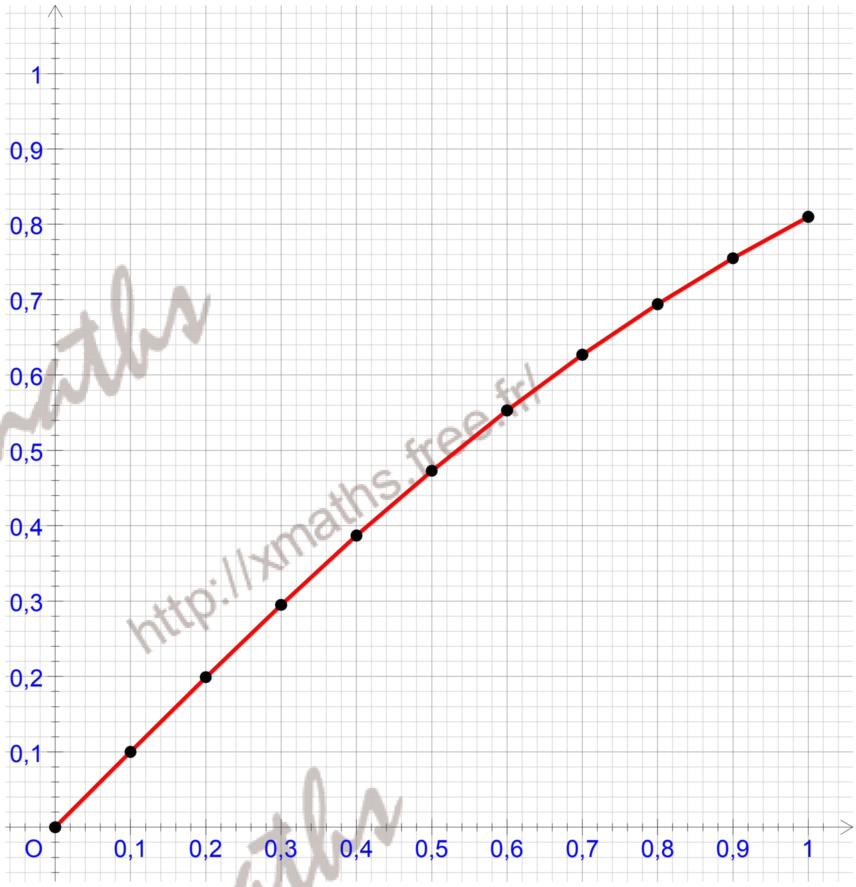
Les valeurs de $f'(x)$ sont calculées à partir de l'expression $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

La valeur de $f(0)$ est donnée par le texte.
Les autres valeurs sont obtenues par des approximations affines successives :
$f(0,1) \approx f(0) + f'(0) \times 0,1$ donc $f(0,1) \approx 0 + 1 \times 0,1$ c'est-à-dire $f(0,1) \approx 0,1$ (voir a))
$f(0,2) \approx f(0,1) + f'(0,1) \times 0,1$ donc $f(0,2) \approx 0,1 + 0,99 \times 0,1$ c'est-à-dire $f(0,2) \approx 0,199$ (voir b))
$f(0,3) \approx f(0,2) + f'(0,2) \times 0,1$ donc $f(0,3) \approx 0,199 + 0,962 \times 0,1$ c'est-à-dire $f(0,3) \approx 0,295$
etc…

valeurs de x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
valeurs approchées de $f(x)$	0	0,1	0,199	0,295	0,387	0,473	0,553	0,627	0,694	0,755	0,81
valeurs approchées de $f'(x)$	1	0,99	0,962	0,917	0,862	0,8	0,735	0,671	0,610	0,552	0,5

(Ce tableau peut être fait très rapidement en utilisant un tableur).

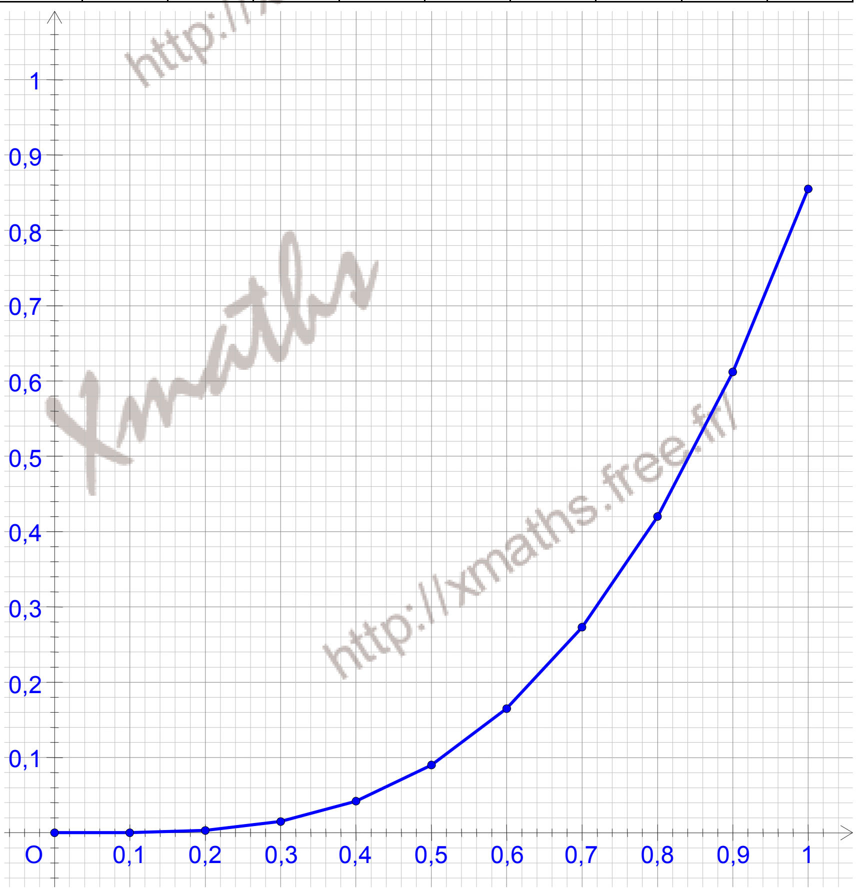
En reliant les différents points par des segments (puisqu'il s'agit d'approximations affines), on obtient alors le graphique de la page suivante :



3°) En utilisant la fonction g telle que $g'(x) = 3x^2$ et $g(0) = 0$ on obtient le tableau ci-dessous :

valeurs de x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
valeurs approchées de $g(x)$	0	0	0,003	0,015	0,042	0,090	0,165	0,273	0,420	0,612	0,855
valeurs approchées de $g'(x)$	0	0,03	0,12	0,27	0,48	0,75	1,08	1,47	1,92	2,43	3

et la représentation graphique approchée ci-contre.

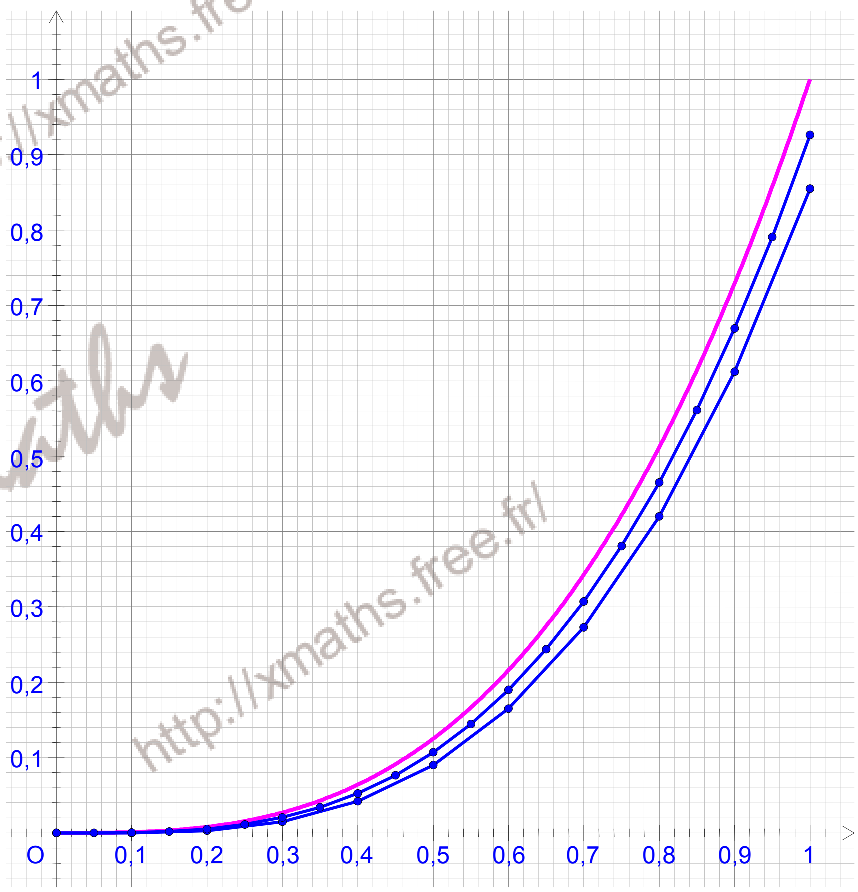


En faisant une subdivision de l'intervalle $[0 ; 1]$ en 20 intervalles de même amplitude, on obtient :

valeurs de x	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
valeurs approchées de $g(x)$	0	0,000	0,000	0,002	0,005	0,011	0,020	0,034	0,052	0,076	0,106
valeurs approchées de $g'(x)$	0	0,008	0,030	0,068	0,120	0,188	0,270	0,368	0,480	0,608	0,750

valeurs de x		0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1
valeurs approchées de $g(x)$		0,144	0,189	0,243	0,306	0,380	0,464	0,560	0,668	0,790	0,925
valeurs approchées de $g'(x)$		0,908	1,080	1,268	1,470	1,688	1,920	2,168	2,430	2,708	3,000

et la représentation graphique approchée ci-contre.



4°) La fonction g définie par $g(x) = x^3$ répond aux conditions de la question précédente. On peut la représenter sur le dessin pour comparer la courbe avec ses approximations

Animation : Approximation pour différentes subdivisions de l'intervalle $[0 ; 1]$
http://xmaths.free.fr/1S/cours/animation.php?nomexo=1Sderian36