Géométrie dans le plan et dans l'espace

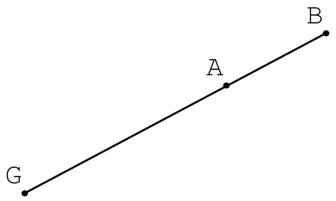
I Rappels sur le barycentre

Définition

Soit $\{(A_i ; a_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$, un système de n points pondérés.
Si la somme des coefficients a_i est non nulle, on appelle barycentre du système $\{(A_i ; a_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$.
l'unique point G vérifiant : $a_1 \overrightarrow{GA_1} + a_2 \overrightarrow{GA_2} + a_3 \overrightarrow{GA_3} + \cdots + a_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{i=n} a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$

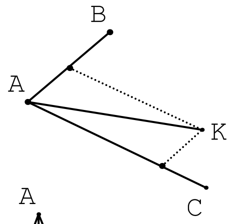
Remarque
Si la somme des coefficients a_i est nulle, il n'existe pas un point G unique vérifiant l'égalité ci-dessus.
Le système $\{(A_i ; a_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ n'a donc pas de barycentre.

Exemples
Le barycentre G de (A ; 3) (B ; –2) est l'unique point vérifiant $3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
c'est-à-dire $3\overrightarrow{GA} - 2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$
c'est-à-dire $\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ soit $\overrightarrow{AG} = -2\overrightarrow{AB}$

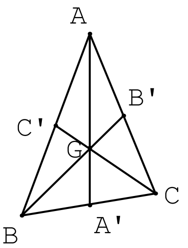


Le barycentre I de (A ; 1) (B ; 1) est l'unique point vérifiant $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$, c'est le milieu de [AB].

Le barycentre K de (A ; –1) (B ; 2) (C ; 3) est l'unique point vérifiant $-\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$
c'est-à-dire $-\overrightarrow{KA} + 2(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB}) + 3(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$
c'est-à-dire $4\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$
c'est-à-dire $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$



Le barycentre G de (A ; 1) (B ; 1) (C ; 1) est l'unique point vérifiant $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, c'est le centre de gravité du triangle ABC (point d'intersection des médianes).



Remarque
Le barycentre ne change pas si on modifie l'ordre des points pondérés. (commutativité de l'addition)
Le barycentre ne change pas si on multiplie tous les coefficients par un même réel non nul.

Définition

On appelle isobarycentre des points A_1, A_2, $\cdots$, A_n, le barycentre de ces points tous affectés d'un même coefficient non nul.

Remarques
Le barycentre de deux points distincts A et B se trouve sur la droite (AB)
L'isobarycentre de deux points A et B est le milieu du segment [AB].
Le barycentre de trois points non alignés A, B et C se trouve dans le plan (ABC).
L'isobarycentre de trois points A, B, C est le centre de gravité du triangle ABC.

Propriété (rappel)

Étant donné un système $\{(A_i\ ;\ a_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ avec $\sum_{i=1}^{i=n} a_i \neq 0$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1°) G est le barycentre du système $\{(A_i\ ;\ a_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$, c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^{i=n} a_i\,\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

2°) Pour tout point M on a : $\overrightarrow{MG} = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=n} a_i\,\overrightarrow{MA_i}}{\sum_{i=1}^{i=n} a_i}$ c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{i=n} a_i\,\overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^{i=n} a_i\right)\overrightarrow{MG}$

Exercice 01 (voir réponses et correction)

On considère dans le plan un triangle isocèle ABC de sommet principal A. On note A' le milieu de [BC].

1°) Soit H le barycentre de (A ; 2) (B ; 1) (C ; 1). Placer H sur un dessin.

2°) On considère l'ensemble (E) des points M du plan tels que $\left\| 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 2 \left\| \overrightarrow{AA'} \right\|$

a) Montrer que A et A' sont des éléments de (E).

b) Déterminer l'ensemble (E) et le représenter sur le dessin.

Propriété (rappel)

Soit G est le barycentre du système $\{(A_i\ ;\ a_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$, avec $\sum_{i=1}^{i=n} a_i \neq 0$.

- Dans le plan,

  si chaque point A_i a pour coordonnées $(x_i\ ,y_i)$, alors $x_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=n} a_i\,x_i}{\sum_{i=1}^{i=n} a_i}$ et $y_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=n} a_i\,y_i}{\sum_{i=1}^{i=n} a_i}$

  si chaque point A_i a pour affixe z_i alors $z_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=n} a_i\,z_i}{\sum_{i=1}^{i=n} a_i}$

- Dans l'espace,

  si chaque point A_i a pour coordonnées $(x_i\ ,y_i\ ,z_i)$, alors $x_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=n} a_i\,x_i}{\sum_{i=1}^{i=n} a_i}$; $y_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=n} a_i\,y_i}{\sum_{i=1}^{i=n} a_i}$ et $z_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=n} a_i\,z_i}{\sum_{i=1}^{i=n} a_i}$

Exercice 02 (voir réponses et correction)

On considère dans le plan complexe les points A, B, C, D d'affixes respectives

$a = 3 + 2i$; $b = 1 - i$; $c = -1 + 5i$; $d = 2 + 5i$

1°) Déterminer l'affixe du centre de gravité G du triangle ABC.

2°) Montrer que D est barycentre de (A ; 2) (B ; −1) (C ; 1).

Exercice 03 (voir réponses et correction)

Dans l'espace, on considère un triangle ABC. Pour tout réel k, on considère l'application f_k qui à chaque point M fait correspondre le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = 2\,\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} + k\overrightarrow{MC}$.

1°) On suppose $k = -1$. Montrer que f_{-1} est une translation que l'on déterminera.

2°) On suppose $k = 1$. En considérant le point Ω barycentre de (A ; 2) ; (B ; 1) ; (C ; 1), montrer que f_1 est une homothétie que l'on caractérisera.

3°) Pour tout réel $k \neq -1$, caractériser géométriquement f_k .

Propriété (rappel)

On considère un système $\{(A_i ; a_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ avec $n > 3$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} a_i \neq 0$

On suppose qu'il existe un entier p tel que $1 < p < n$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=p} a_i \neq 0$

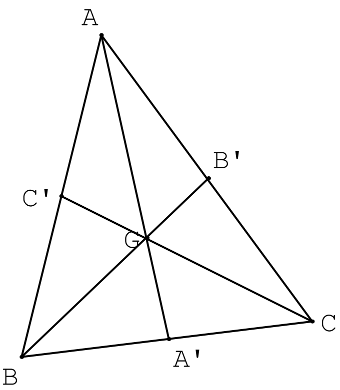
Soit G le barycentre du système $\{(A_i ; a_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et G_0 le barycentre du système $\{(A_i ; a_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant p}$

alors G est barycentre de $\left(G_0 ; \displaystyle\sum_{i=1}^{i=p} a_i\right) ; (A_{p+1} ; a_{p+1}) ; \cdots ; (A_n ; a_n)$.

(On peut remplacer les p premiers points par leur barycentre partiel affecté de la somme de leurs coefficients.)

Exemples

On considère un triangle ABC
A', B', C' les milieux respectifs des segments [BC], [AC], [AB] et G l'isobarycentre des points A, B et C
Alors G est le barycentre de (A ; 1) (B ; 1) (C ; 1),
donc G est barycentre de (A ; 1) (A' ; 2)
G est barycentre de (B ; 1) (B' ; 2)
G est barycentre de (C ; 1) (C' ; 2)
G se trouve donc sur chaque des médianes (AA') ; (BB') et (CC').



Si on considère un tétraèdre ABCD, on peut justifier par la propriété précédente que le point G isobarycentre des points A, B, C, D est le point d'intersection des quatre droites joignant un sommet au centre de gravité de la face oppose et des trois droites joignant les milieux de deux cotés non adjacents.

Exercice 04 (voir réponses et correction)

On considère un triangle MAB. On note A' et B' les milieux respectifs des segments [MB] et [MA].
Soit H le barycentre de (A ; 2) ; (M ; 5) et K le barycentre de (A ; 2) ; (B ; 3) ; (M ; 5)
1°) Montrer que K est le barycentre de (H ; 7) ; (B ; 3) et que K est aussi barycentre de (A' ; 3) ; (B' ; 2).
2°) En déduire que K est point d'intersection des droites (A'B') et (BH). Faire un dessin.
3°) La droite (MK) coupe la droite (AB) en R. Montrer que R est barycentre de (A ; 2) ; (B ; 3).
4°) On suppose que le point M décrit un cercle de centre A et de rayon r.
Déterminer et représenter sur le dessin l'ensemble décrit par le point K.

Exercice 05 (voir réponses et correction)

1°) On considère quatre points A, B, C, D du plan.
Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que $\left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = BD$.
Faire un dessin.
2°) Que peut-on dire de l'ensemble (E) lorsque ABCD est un parallélogramme ?
3°) Que peut-on dire de l'ensemble (E) lorsqu'on considère quatre points A, B, C, D de l'espace.

Exercice 06 (voir réponses et correction)

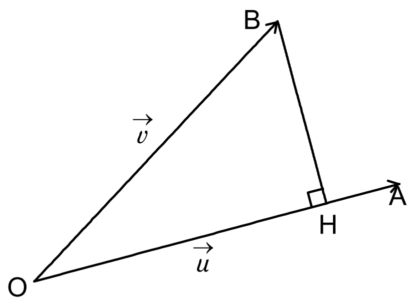
Soit A, B, C et D quatre points de l'espace. On considère I milieu de [AC] et J milieu de [BD].
A quelle condition les points I et J sont-ils distincts. On supposera cette condition réalisée pour la suite de l'exercice.

Soit K défini par $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; L défini par $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.

Justifier l'existence du barycentre G du système {(A ; 1) ; (B ; 2) ; (C ; 1) ; (D ; 2)}
Démontrer que les droites (IJ) et (KL) ont un point commun.
ILKJ est-il un parallélogramme ?

II Produit scalaire dans le plan et dans l'espace

Définition (rappel)



Étant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, soient O, A et B trois points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.

- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, soit H le projeté orthogonal de B sur (OA).
  Le produit $\overline{OA} \times \overline{OH}$ ne dépend que des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
  On l'appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, on le note $\vec{u} . \vec{v}$.
- Si $\vec{u} = \vec{0}$, on pose $\vec{u} . \vec{v} = 0$

Remarque

Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{u}$ est aussi noté $\vec{u} . \vec{u} = \vec{u}^2$

Propriété (rappel)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls du plan, on a : $\vec{u} . \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

Propriété (rappel)

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan sont orthogonaux, si et seulement si leur produit scalaire $\vec{u} . \vec{v}$ est nul.

Propriété (rappel)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$; $\vec{u'}$; $\vec{v}$ du plan et tout réel k, on a :

$\vec{u} . \vec{v} = \vec{v} . \vec{u}$; $(k\vec{u}) . \vec{v} = \vec{u} . (k\vec{v}) = k(\vec{u} . \vec{v})$; $(\vec{u} + \vec{u'}) . \vec{v} = \vec{u} . \vec{v} + \vec{u'} . \vec{v}$

$\vec{u} . \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$; $\vec{u} . \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$

Propriété (rappel)

Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal du plan, on a :

$\vec{i} . \vec{i} = \|\vec{i}\|^2 = 1$; $\vec{j} . \vec{j} = \|\vec{j}\|^2 = 1$; $\vec{i} . \vec{j} = 0$ et $\vec{j} . \vec{i} = 0$

Si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont les vecteurs de coordonnées $(x ; y)$ et $(x' ; y')$ dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$,

$\vec{u} . \vec{u'} = xx' + yy'$; $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exercice 07 (voir réponses et correction)

1°) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. démontrer l'égalité : $(\vec{u} + \vec{v})^2 + (\vec{u} - \vec{v})^2 = 2\vec{u}^2 + 2\vec{v}^2$

2°) En déduire que dans un parallélogramme la somme des carrés des quatre cotés est égale à la somme des carrés des deux diagonales.

3°) Soit ABC un triangle et A' le milieu de [BC].
Démontrer que $AB^2 + AC^2 = 2 AA'^2 + \frac{1}{2} BC^2$

Exercice 08 (voir réponses et correction)

Soit un triangle ABC rectangle en A. On désigne par A' le milieu de [BC], par H le pied de la hauteur issue de A et par I et J les projetés orthogonaux de H sur (AB) et (AC).

Démontrer que $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{IJ} = - \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AH}$

Démontrer que les droites (AA') et (IJ) sont perpendiculaires.

Définition

Dans l'espace, on appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ et on note $\vec{u}.\vec{v}$

le nombre réel : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$

Propriété

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormal du plan. Si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont les vecteurs de coordonnées respectives $(x\,;y\,;z)$ et $(x'\,;y'\,;z')$, on a : $\vec{u}.\vec{u'} = xx' + yy' + zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Remarque

Du fait de sa définition, le produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace correspond au produit scalaire de ces deux vecteurs dans tout plan qui les contient. On pourra donc utiliser pour le produit scalaire dans l'espace les propriétés démontrées pour le produit scalaire dans le plan.

Propriété

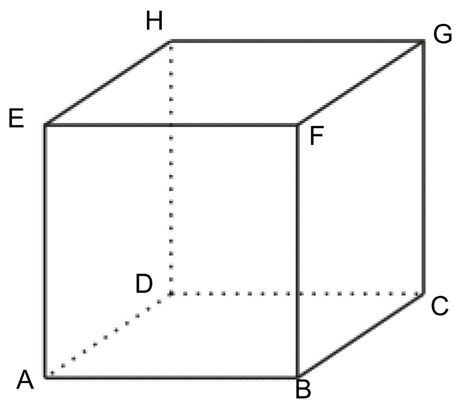
Pour tous vecteurs $\vec{u}$; $\vec{u'}$; $\vec{v}$ de l'espace et tout réel k, on a :

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$; $(k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$; $(\vec{u} + \vec{u'}).\vec{v} = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u'}.\vec{v}$; $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ de l'espace sont orthogonaux, si et seulement si leur produit scalaire $\vec{u}.\vec{u'}$ est nul.
Deux droites sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Exercice 09 (voir réponses et correction)

On considère un cube ABCDEFGH.



L'espace est rapporté au repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

1°) a) Donner les coordonnées des points A, F, C et H.

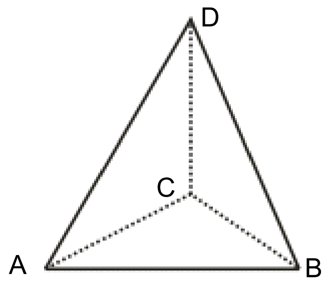
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{CH}$.
Les droites (AF) et (CH) sont-elles orthogonales ?

b) En remarquant que $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BE}$, retrouver le résultat précédent.

2°) a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{FD}$.
Les droites (EC) et (FD) sont-elles orthogonales ?

b) En remarquant que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DC}$ retrouver le résultat précédent.

Exercice 10 (voir réponses et correction)



On considère un tétraèdre régulier ABCD.
On pose AB = BC = CD = AC = a .
Soit G l'isobarycentre des points B, C, D.

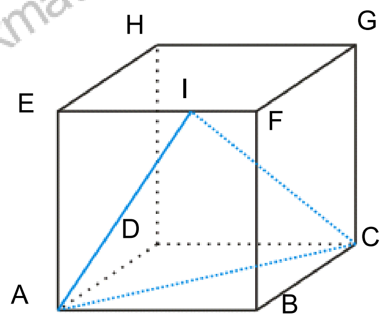
Calculer en fonction de a les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$.
Justifier que (AD) est orthogonale à (BC).

Déduire des calculs précédents le produit scalaire $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC}$.

Calculer $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 11 (voir réponses et correction)

On considère un cube ABCDEFGH.



L'espace est rapporté au repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
Soit I le barycentre de (E ; k) et (F ; $1 - k$) avec $k \in \mathbb{R}$.
Déterminer les valeurs de k pour lesquelles les trois points A, I et C forment un triangle rectangle.
Faire un dessin.

III Géométrie dans le plan

Propriété

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal du plan.

- Si A et B sont les points de coordonnées $(x_A ; y_A)$, $(x_B ; y_B)$, $d(A,B) = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- Le cercle de centre $\Omega(x_0 ; y_0)$ et de rayon R a pour équation : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

Exercice 12 (voir réponses et correction)

Parmi les équations suivantes, déterminer celles qui sont des équations de cercle et donner alors le centre et le rayon :

$2x^2 + 2y^2 - 5 = 0$ $\qquad$ $x^2 + 2x + y^2 + y - 3 = 0$ $\qquad$ $x^2 + 4x + y^2 + 5 = 0$

Exercice 13 (voir réponses et correction)

Déterminer l'équation du cercle de centre $I(2 ; 3)$ et de rayon $\sqrt{2}$

Déterminer l'équation du cercle de diamètre $[AB]$, avec $A(5 ; 1)$ et $B(2 ; -3)$

Propriété

Soit ABC un triangle. On pose : $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ABC} = \beta$, $\widehat{ACB} = \gamma$.

Alors : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$ $\qquad$ Relation d'Al Kashi

L'aire du triangle est donnée par : $S = \frac{1}{2} bc \sin\alpha = \frac{1}{2} ac \sin\beta = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$.

On peut en déduire que $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Remarque

La relation d'Al Kashi permet de justifier le théorème de Pythagore et sa réciproque.

Exercice 14 (voir réponses et correction)

1°) ABC est un triangle tel que $AB = 4$; $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 62°$
Déterminer BC.

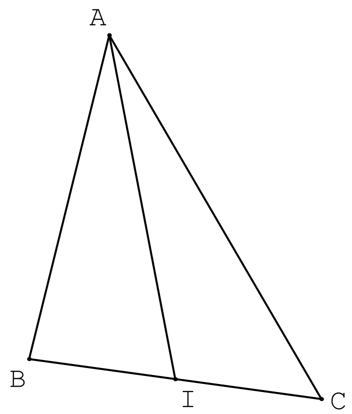
2°) On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormal les points A, B et C de coordonnées respectives $(1 ; 2)$; $(3 ; 4)$; $(4 ; 0)$
Déterminer des valeurs approchées des angles du triangle ABC. Calculer l'aire S de ce triangle.

3°) On considère un triangle ABC tel que :
$AB = 1$; $\widehat{BAC} = 15°$ et $\widehat{ABC} = 30°$.
Soit H le pied de la hauteur issue de C. Déterminer CH.

Propriété (théorème de la médiane)

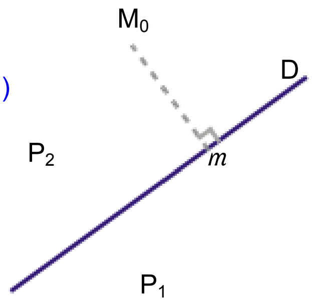
Étant donné un triangle ABC et I le milieu de $[BC]$, on a :

$AB^2 + AC^2 = 2 AI^2 + \frac{1}{2} BC^2$



Propriété

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal,
toute droite D a une équation de la forme $ax + by + c = 0$
avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$ appelée équation cartésienne.
Le vecteur $\vec{n}\,(a ; b)$ est un vecteur orthogonal à la droite D (vecteur normal à D)
Le vecteur $\vec{u}\,(b ; -a)$ est un vecteur directeur de D.
La droite D partage le plan en deux demi-plans P_1 et P_2 caractérisés par les inéquations :
$ax + by + c \geqslant 0$ et $ax + by + c \leqslant 0$



Définition

On appelle projection orthogonale sur la droite D l'application qui à un point M_0 du plan associe le point m, intersection de D et de la droite passant par M_0 et perpendiculaire à D.

Exercice 15 (voir réponses et correction)

On considère dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$, la droite D d'équation :
$3x + 2y - 5 = 0$.
Soit M un point de coordonnées $(x ; y)$.
Donner en fonction de x et y les coordonnées $(x' ; y')$ du projeté orthogonal de M sur la droite D.

Propriété

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, la distance du point $M_0(x_0 ; y_0)$ à son projeté orthogonal m sur la droite D d'équation cartésienne : $ax + by + c = 0$ $(a ; b) \neq (0 ; 0)$ est :

$$d(M_0, D) = M_0m = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Elle est appelée distance de M_0 à la droite D.

Exercice 16 (voir réponses et correction)

On considère dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$, la droite D d'équation :
$2x - 3y + 1 = 0$.
Soit A le point de coordonnées $(3 ; -5)$.
Faire un dessin. Déterminer la distance du point A à la droite D.
Soit B(1 ; 1) et C(7 ; 5). Déterminer l'aire du triangle ABC.

Exercice 17 (voir réponses et correction)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$
On considère les points A(1 ; 1) ; B(1 ; 5) et C(5 ; 4).
Déterminer une équation cartésienne de (AB) et une équation cartésienne de (AC).
Déterminer et tracer l'ensemble des points $M(x ; y)$ équidistants des droites (AB) et (AC).
A quoi correspond cet ensemble ?

Exercice 18 (voir réponses et correction)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$
On considère le cercle (C) de centre $\Omega(1 ; 2)$ passant par $A(2 ; -1)$.
Déterminer l'équation de la tangente à (C) au point A.

IV Géométrie dans l'espace - Caractérisation de droites et de plans

Propriété

Soit $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace.

- Si A et B sont les points de coordonnées $(x_A ; y_A ; z_A)$, $(x_B ; y_B ; z_B)$,
  $d(A,B) = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- La sphère de centre $\Omega(x_0 ; y_0 ; z_0)$ et de rayon R a pour équation : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

Exercice 19 (voir réponses et correction)

1°) Déterminer le centre et le rayon de la sphère S d'équation : $x^2 + 2x + y^2 + z^2 - z = \frac{11}{4}$

2°) Déterminer l'équation de la sphère S' de diamètre [AB] avec A(2 ; 2 ; 0) et B(−1 ; 5 ; 1).

3°) Soit C le point de coordonnées (2 ; 4 ; 2). C appartient-il à S ? C appartient-il à S' ?

Propriété

- L'ensemble des barycentres de $(A ; a)$; $(B ; b)$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $a + b \neq 0$ est la droite (AB).
- L'ensemble des barycentres de $(A ; a)$; $(B ; b)$ avec $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et $a + b \neq 0$ est le segment [AB].
- L'ensemble des barycentres de $(A ; a)$; $(B ; b)$; $(C ; c)$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et $a + b + c \neq 0$ est le plan (ABC).
- L'ensemble des barycentres de $(A ; a)$; $(B ; b)$; $(C ; c)$ avec $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ et $a + b + c \neq 0$ est l'intérieur du triangle ABC (cotés compris).

Exercice 20 (voir réponses et correction)

Soit ABC un triangle.On considère l'application f qui à tout point M du plan associe le point f(M) = M', barycentre de (A ; AM) ; (B ; BM) ; (C ; CM).

On note I le milieu du segment [BC].

1°) Le point A peut-il être invariant par f ?

2°) On considère le point R symétrique de A par rapport à (BC). Existe-t-il un point M du plan tel que M' = R ?

3°) Soit M un point appartenant à la médiatrice de [BC].
Montrer que M' appartient à [AI]. Peut-on avoir M' = I ?

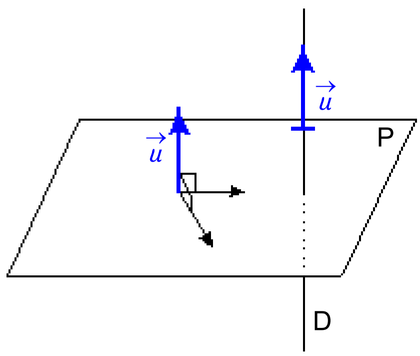
4°) Soit S le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Déterminer S'.

Définition

On dit qu'un vecteur $\vec{u}$ est orthogonal (ou normal) à un plan P si $\vec{u}$ est orthogonal à tout vecteur de P.

Propriété

- Pour qu'un vecteur $\vec{u}$ soit orthogonal à un plan P, il suffit qu'il soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de P.
- Tous les vecteurs orthogonaux à P sont colinéaires entre eux.
- Une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ est orthogonale (perpendiculaire) à P si et seulement si $\vec{u}$ est orthogonal à P.
- Pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan P, il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.



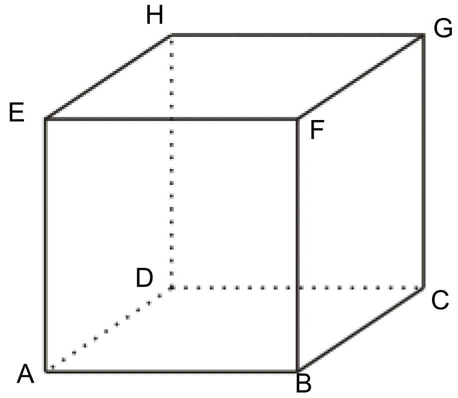
Exercice 21 (voir réponses et correction)

On considère un cube ABCDEFGH.

Justifier que $\overrightarrow{AE}$ est orthogonal au plan ABCD.

En déduire la valeur de $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC}$.

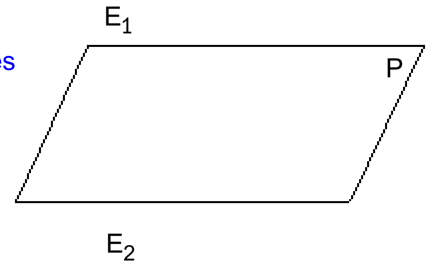
Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est orthogonal au plan HDBF.



Propriété

Tout plan P a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a ; b ; c) \neq (0 ; 0 ; 0)$.
$\vec{u}(a ; b ; c)$ est alors un vecteur orthogonal à P.
Réciproquement l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a ; b ; c) \neq (0 ; 0 ; 0)$ est un plan qui a pour vecteur orthogonal $\vec{u}\ (a ; b ; c)$.

Un plan P partage l'espace en deux demi-espaces E_1 et E_2 caractérisés par les inéquations :
$ax + by + cz + d \geqslant 0$ et $ax + by + cz + d \leqslant 0$



Exercice 22 (voir réponses et correction)

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points A(3 ; 1 ; 2) ; B(1 ; –1 ; 1) et C(5 ; 2 ; 3).

Déterminer une équation du plan P passant par A et orthogonal au vecteur $\overrightarrow{BC}$.
Déterminer une équation du plan (ABC).

Propriété

Soit D la droite passant par $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\ (a ; b ; c)$.

$$M(x ; y ; z) \in D \iff \begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

Le système ci-dessus est appelé système d'équations paramétriques de la droite D.
Réciproquement, un tel système avec $(a ; b ; c) \neq (0 ; 0 ; 0)$ définit une droite.

Exercice 23 (voir réponses et correction)

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
1°) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite passant par A(2 ; 3 ; –1) et de vecteur directeur $\vec{u}(1 ; 0 ; 1)$.
2°) On considère C(2 ; 3 ; 0) et D(–1 ; 1 ; 5).
Donner un système d'équations paramétriques de la droite (CD).
3°) Soit P le plan d'équation $3x - z + 1 = 0$.
Donner un système d'équations paramétriques de la droite passant par O et perpendiculaire au plan P.

Rappel

Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires c'est-à-dire lorsque $\vec{v} = k\,\vec{u}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$.
Deux droites sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux c'est-à-dire lorsque $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
Deux droites dans l'espace peuvent être orthogonales sans être sécantes.

Exercice 24 (voir réponses et correction)

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

1°) Soit D la droite d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 2k \\ z = 1 - k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$.

Donner un point et un vecteur directeur de D.

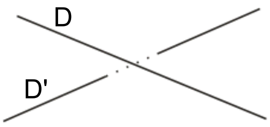
2°) Soit D' la droite d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = 2 + k \\ y = 1 \\ z = 1 + 3k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$.

Montrer que D et D' sont orthogonales. Sont-elles sécantes ?

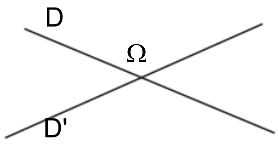
Propriété

L'intersection de deux droites D et D' de l'espace peut être :

- l'ensemble vide,
  Les droites sont parallèles ou non coplanaires



- un point unique,
  Les droites sont coplanaires et non parallèles



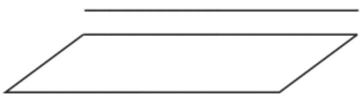
- une droite
  Les droites sont confondues

(On pourra déterminer cette intersection en utilisant des systèmes d'équations paramétriques des droites).

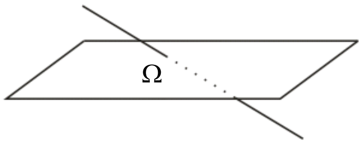
Propriété

L'intersection d'une droite D et d'un plan P dans l'espace peut être :

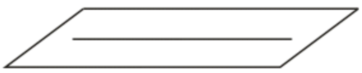
- l'ensemble vide
  La droite est strictement parallèle au plan



- un point unique
  La droite est sécante au plan



- la droite D tout entière
  La droite est contenue dans le plan



(On pourra déterminer cette intersection en utilisant un système d'équations paramétriques de la droite et une équation cartésienne du plan.)

Exercice 25 (voir réponses et correction)

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

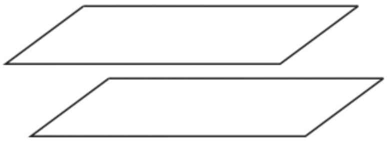
Soit D la droite d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 1 - 3k \\ z = 1 + k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$.

Soit P le plan d'équation $2x + y - z - 3 = 0$.
Soit P' le plan d'équation $x + 2y - 2z + 5 = 0$.
Déterminer l'intersection de D et de P et l'intersection de D et de P'.

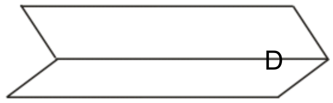
Propriété

L'intersection de deux plans dans l'espace peut être :

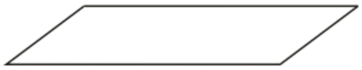
- l'ensemble vide
  Les plans sont strictement parallèles



- une droite D
  Les plans sont sécants



- un plan
  Les plans sont confondus



(On pourra déterminer cette intersection en utilisant des équations cartésiennes du plan.)

Remarque

Deux plans d'équations $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont parallèles lorsque leurs vecteurs normaux sont colinéaires, c'est-à-dire lorsque les triplets $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ et $(a'\ ;\ b'\ ;\ c')$ sont proportionnels.
Une droite pourra être définie par intersection de deux plans, c'est-à-dire par un système de deux équations cartésiennes : $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ avec $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ et $(a'\ ;\ b'\ ;\ c')$ non proportionnels.

Exercice 26 (voir réponses et correction)

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soient P et P' les plans d'équations respectives $2x + y - z - 3 = 0$ et $x + 2y - 2z + 5 = 0$
Montrer que l'intersection de P et de P' est une droite dont on donnera un système d'équations paramétriques.

Propriété

L'intersection de trois plans peut être : l'ensemble vide, un point, une droite ou un plan.
(On pourra déterminer ces intersections en écrivant les systèmes formés avec les équations cartésiennes des plans.)

Exercice 27 (voir réponses et correction)

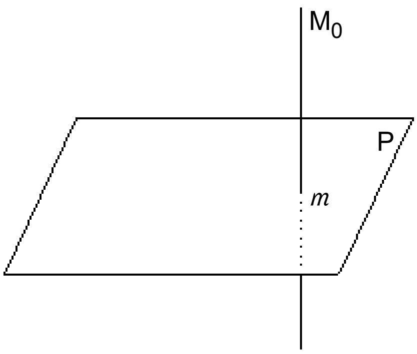
L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Déterminer l'intersection des trois plans d'équations respectives :
$x + y - 2z - 5 = 0$; $2x + 3y + z = 0$; $x - y + z + 1 = 0$

Exercice 28 (voir réponses et correction)

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Dans chacun des cas déterminer l'intersection des trois plans d'équations :
1°) $2x + y - 3z - 1 = 0$; $3x - 3y + 2z - 4 = 0$; $x + 5y - 8z + 2 = 0$
2°) $-x + y + 3z = -1$; $2x - 3y + z = 0$; $-7x + 10y - 2 = 0$

Définition

La projection orthogonale sur le plan P est l'application qui à un point M_0 associe le point m, intersection de P et de la droite passant par M_0 et perpendiculaire à P.



Propriété

La distance du point $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ au plan P est la distance du point M_0 à son projeté orthogonal m.

Elle s'exprime par : $d(M_0, P) = M_0m = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

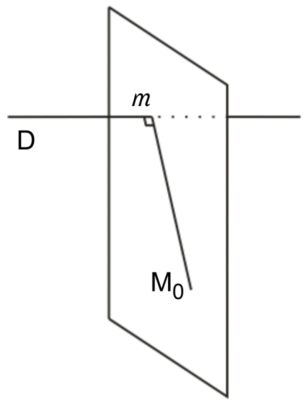
lorsque le plan P a pour équation $ax + by + cz + d = 0$ dans un repère orthonormal de l'espace.

Exercice 29 (voir réponses et correction)

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit P le plan d'équation : $2x - 2y + z - 3 = 0$ et A le point de coordonnées (1 ; 1 ; 2).
1°) Déterminer la distance d du point A au plan P.
2°) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur P.
Vérifier que AH = d.

Définition

La projection orthogonale sur la droite D est l'application qui à un point M_0 associe le point m, intersection de D et du plan passant par M_0 et perpendiculaire à D.



Exercice 30 (voir réponses et correction)

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit D la droite ayant pour système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = 3 - k \\ z = 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}.$$

1°) Soit A de coordonnées (– 5 ; 0 ; 6).
Montrer que A appartient à D. Quel est le projeté orthogonal de A sur D ?
2°) Soit B de coordonnées (2 ; – 1 ; 0)
Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de B sur D.