Équations différentielles

Remarque

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ ou sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
Cette équation fait intervenir la fonction notée y, ses dérivées y', y'', ... et des fonctions connues.

Exercice 01 (voir réponses et correction)

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = x^2$

1°) Montrer que la fonction f définie par : $f(x) = x^2 + 4x + 6$ est une solution de (E).

2°) Montrer que la fonction f définie par : $f(x) = x^2 + 4x + 6$ est la seule fonction polynôme du second degré solution de (E).

3°) Montrer que la fonction g définie par : $g(x) = (2x - 5)\,e^x + x^2 + 4x + 6$ est une solution de (E).

Exercice 02 (voir réponses et correction)

Donner une solution (non nulle) pour chacune des équations différentielles suivantes :

$y' = y$; $y' = 2y$; $y' = -y$; $y'' = -y$; $y' = 2$

Rappels

On sait que la fonction exponentielle est solution de l'équation différentielle $y' = y$.
C'est la seule solution de cette équation pour laquelle on a $y(0) = 1$.

Propriété (voir démonstration 01)

- L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ ($a \in \mathbb{R}$) est l'ensemble des fonctions de la forme $y = k\,e^{ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$
- Etant donné un couple de réels $(\alpha ; \beta)$, il existe une unique solution de l'équation différentielle $y' = ay$ ($a \in \mathbb{R}$) vérifiant $y(\alpha) = \beta$

Exercice 03 (voir réponses et correction)

Dans chacun des cas suivants déterminer la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

1°) $f' + 2f = 0$; $f(1) = 3$

2°) $3f' - 2f = 0$; $f(3) = -1$

3°) $2f' = f$; $2f(-1) = 3$

4°) $f - 2f' = 0$; $f(0) = 3$

Exercice 04 (voir réponses et correction)

f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $4f' - 3f = 0$ et $f(0) = 1$
Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes :

a) La courbe représentative de f passe par le point A de coordonnées $\left(1 ; \frac{3}{4}\right)$

b) La courbe représentative de f a, au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur 1.

c) f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$

d) f est solution de l'équation différentielle $16y'' - 9y = 0$

Exercice 05 (voir réponses et correction)

Un fil conducteur parcouru par un courant électrique d'intensité constante s'échauffe par effet Joule et sa température, en degrés Celsius, est une fonction θ du temps t exprimé en secondes.
On choisit l'instant de mise sous tension comme origine des temps ($t = 0$) et, à cet instant, la température du conducteur est égale à 0° C.
Dans les conditions de l'expérience, la fonction θ est telle que : $\theta'(t) + 0{,}1\,\theta(t) = 2$

1°) Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(t) = \theta(t) - 20$
Montrer que f est une solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 0{,}1\,y = 0$

2°) Résoudre l'équation différentielle (E)

3°) En déduire l'expression de $\theta(t)$.

4°) Quelle température atteint le conducteur au bout de dix secondes, de trente secondes, d'une minute ?
Calculer la limite de $\theta(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

Exercice 06 (voir réponses et correction)

Donner une solution de l'équation différentielle $y' = y + 1$
Donner une solution de l'équation différentielle $y' = y + b$
Donner une solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$

Propriété (voir démonstration 02)

- L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$) est l'ensemble des fonctions de la forme $y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
- Etant donné un couple $(\alpha ; \beta)$, il existe une unique solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$) vérifiant $y(\alpha) = \beta$

Exercice 07 (voir réponses et correction)

Donner, dans chacun des cas, l'ensemble des solutions des équations différentielles.

1°) $y' = 3y - 1$
2°) $2y' - 5y + 3 = 0$
3°) $y = -3y' + 2$
4°) $y' + y = 2$

Exercice 08 (voir réponses et correction)

Dans chacun des cas donner la solution de l'équation différentielle vérifiant la condition donnée

1°) $f' = 2f + 1$; $f(1) = 3$
2°) $3f' - f = 3$; $f(2) = -1$
3°) $2f' = f - 5$; $f(0) = 2$
4°) $f - 4f' - 3 = 0$; $f(-1) = 1$

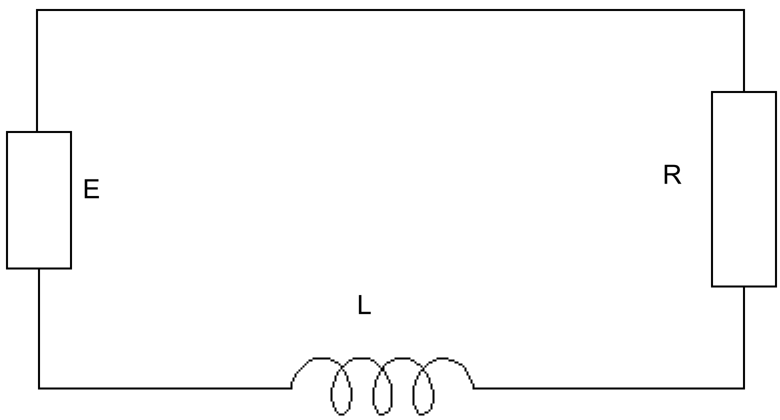
Exercice 09 (voir réponses et correction)

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3x^2 - 1$

1°) Démontrer qu'il existe une et une seule fonction polynôme du second degré p solution de (E).
2°) Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E') : $y' + 2y = 0$.
3°) Démontrer qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement si $(g - p)$ est solution de (E').
4°) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 10 (voir réponses et correction)

Un circuit comprend en série un générateur de force électromotrice E, une bobine d'inductance L et une résistance R.



L'intensité du courant électrique i, exprimée en ampères, est fonction du temps t, exprimé en secondes, et est solution de l'équation différentielle (E) : $L\, i'(t) + R\, i(t) = E$
L est exprimée en henrys, R en ohms et E en volts. On donne $L = 0{,}2$ H ; $R = 100\ \Omega$; $E = 10$ V.
Écrire et résoudre l'équation différentielle (E) en sachant qu'à l'instant $t = 0$ l'intensité du courant est nulle.
Quelle est la limite de $i(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?