

Puissances Croissances comparées

I Puissances d'un nombre $a > 0$

Exercice 01 (voir [réponses et correction](#))

1°) Donnez les valeurs de :

$$2^4 \qquad 3^2 \qquad 5^{-1} \qquad (0,1)^3$$

2°) En utilisant la calculatrice, donnez des valeurs approchées de :

$$e^{4 \ln 2} \qquad e^{2 \ln 3} \qquad e^{-\ln 5} \qquad e^{3 \ln 0,1}$$

Que remarquez vous ? Est-il possible de justifier ?

Si vous ne remarquez rien, pensez que la calculatrice a parfois besoin de parenthèses...

Définition

Pour tout réel a strictement positif et tout réel b , on pose : $a^b = e^{b \ln a}$.

On définit ainsi les puissances d'un nombre réel strictement positif a .

Exemple

On a alors $2^\pi = e^{\pi \ln 2}$; $5^{\frac{3}{4}} = e^{\frac{3}{4} \ln 5}$

Remarque

- On peut remarquer que si n est entier $e^{n \ln a} = e^{\ln a^n} = a^n = a \times a \times \dots \times a$ (n facteurs)
La définition est donc compatible avec la définition des puissances entières du nombre a .
D'autre part $e^{b \ln e} = e^{b \times 1} = e^b$
La définition est donc compatible avec la définition de la fonction exponentielle.
- Les calculs de puissances peuvent être faits en utilisant une calculatrice :
avec la fonction exponentielle
ou avec la touche puissance : \wedge ou x^y suivant les modèles
On pourra vérifier que $e^{\pi \ln 2}$ et 2^π donnent bien le même résultat.

```
e^(pi ln 2)
8.824977827
2^pi
8.824977827
```

Propriétés (voir [démonstration 01](#))

Pour tous réels strictement positifs a et a' , et pour tous réels b et b' , on a :

$$\begin{aligned} \ln(a^b) &= b \ln a & ; & & 1^b &= 1 \\ a^{b+b'} &= a^b \cdot a^{b'} & ; & & a^{-b} &= \frac{1}{a^b} & ; & & a^{b-b'} &= \frac{a^b}{a^{b'}} \\ a^{b \cdot b'} &= (a^b)^{b'} & ; & & (a \cdot a')^b &= a^b \cdot a'^b & ; & & \left(\frac{a}{a'}\right)^b &= \frac{a^b}{a'^b} \end{aligned}$$

Exercice 02 (voir [réponses et correction](#))

En utilisant une calculatrice, donner des valeurs approchées de :

$$5^{\sqrt{2}} \quad ; \quad 3,5^{1+\pi} \quad ; \quad (1 + \sqrt{2})^{0,1} \quad ; \quad 12^{-1,5} \quad ; \quad (\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$$

Exercice 03 (voir [réponses et correction](#))

Écrire plus simplement :

$$2^\pi \times 4 \quad ; \quad 4 e^{2 \ln 3} \quad ; \quad \frac{e^{3 \ln 2}}{9} \quad ; \quad \frac{3^{1+x}}{e^{x \ln 3}}$$

Exercice 04 (voir [réponses et correction](#))

Donner en utilisant une calculatrice les valeurs de : $9^{\frac{1}{2}}$; $4^{\frac{1}{2}}$; $25^{\frac{1}{2}}$; $2^{\frac{1}{2}}$

Justifier que pour tout réel $a > 0$; $a^{\frac{1}{2}}$ est le réel positif dont le carré est a . Que peut-on en déduire ?

Justifier que pour tout réel $a > 0$; $a^{\frac{1}{3}}$ est le réel positif dont le cube est a .

Propriété - Définition (voir [démonstration 02](#))

Soit a un réel strictement positif.

Pour tout entier n strictement positif, $a^{\frac{1}{n}}$ est le réel positif qui, élevé à la puissance n donne a .

On dit que $a^{\frac{1}{n}}$ est la racine $n^{\text{ième}}$ de a . On note aussi $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Exercice 05 (voir [réponses et correction](#))

Dans un pays donné, l'inflation pour trois années consécutives est de : 6% ; 16 % ; 5% .

Quel est le pourcentage d'augmentation totale des prix sur les 3 ans ?

On appelle t le pourcentage d'augmentation par année qui conduirait sur 3 ans à la même augmentation totale.

Justifier que : $1 + \frac{t}{100} = (1,06 \times 1,16 \times 1,05)^{\frac{1}{3}}$. En déduire la valeur de t (à 10^{-2} près). Conclure.

Définition

a_1, a_2, \dots, a_n sont n nombres réels strictement positifs.

On appelle moyenne géométrique de a_1, a_2, \dots, a_n le nombre : $a = (a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n}$

Remarque

Un pourcentage d'augmentation de $t\%$ correspond à un coefficient multiplicateur de $1 + \frac{t}{100}$

Un pourcentage de diminution de $t\%$ correspond à un coefficient multiplicateur de $1 - \frac{t}{100}$

Un pourcentage de variation moyen correspond à la moyenne géométrique des coefficients multiplicateurs.

Exercice 06 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer la moyenne géométrique des trois nombres : 1,12 ; 1,18 ; 0,71

Interpréter cette moyenne en terme de pourcentages de variation.

Exercice 07 (voir [réponses et correction](#))

1°) Une banque prête de l'argent avec un taux mensuel de 0,4%.

Quel est le taux annuel correspondant ?

2°) Une banque prête de l'argent avec un taux annuel de 12%.

Quel est le taux mensuel correspondant ?

Exercice 08 (voir [réponses et correction](#))

La population mondiale a doublé entre 1960 et 2000. Quel a été le taux d'accroissement moyen annuel ?

Exercice 09 (voir [réponses et correction](#))

De quel pourcentage doit-on augmenter le côté d'un carré pour que son aire triple ?

De quel pourcentage doit-on augmenter l'arête d'un cube pour que son volume double ?

II Fonctions $x \mapsto a^x$

Propriété (voir [démonstration 03](#))

Soit a un réel strictement positif.

La fonction définie sur \mathbb{R} qui à x associe a^x est dérivable et sa dérivée est donnée par $(a^x)' = a^x \times \ln(a)$

Remarque

La fonction $x \mapsto a^x$ est appelée fonction exponentielle de base a .

La fonction $x \mapsto e^x$ est alors la fonction exponentielle de base e .

Propriété (voir [démonstration 04](#))

La fonction qui à x associe a^x est :

- strictement croissante sur \mathbb{R} si $a > 1$
- constante sur \mathbb{R} si $a = 1$
- strictement décroissante sur \mathbb{R} si $0 < a < 1$

Exercice 10 (voir [réponses et correction](#))

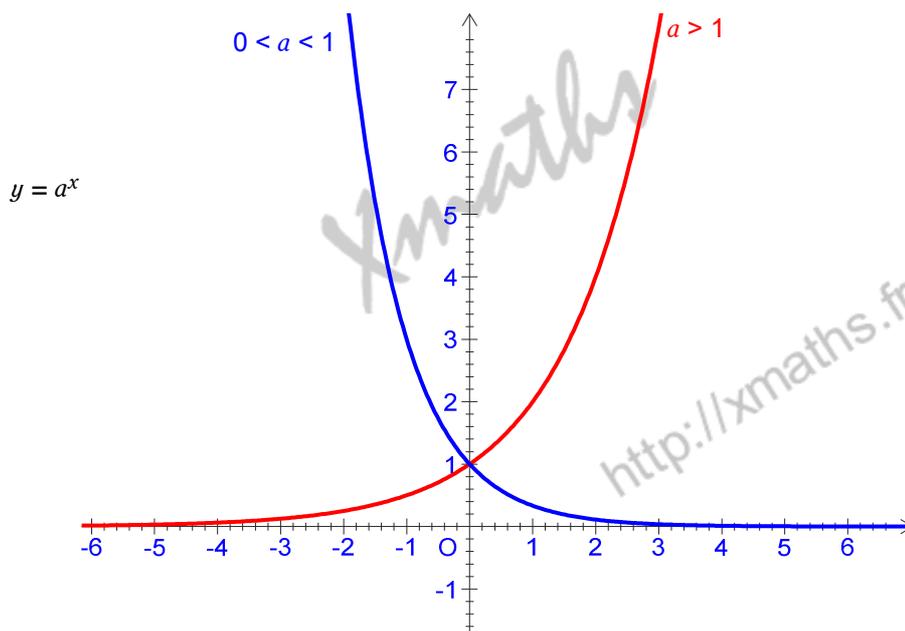
Montrer que l'équation $3^x = 50$ a une solution unique α dont on donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

Résoudre l'inéquation $3^x > 50$.

Propriété (voir [démonstration 05](#))

- Si $a > 1$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$
- Si $0 < a < 1$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$

Courbes représentatives



Exercice 11 (voir [réponses et correction](#))

En utilisant une calculatrice ou un ordinateur, tracer les courbes représentatives des fonctions

$$x \mapsto 1,5^x \quad ; \quad x \mapsto 2^x \quad ; \quad x \mapsto 5^x$$

Que peut-on dire des positions respectives de ces trois courbes ?

Exercice 12 (voir [réponses et correction](#))

En utilisant une calculatrice ou un ordinateur, tracer les courbes représentatives des fonctions

$$x \mapsto 0,1^x \quad ; \quad x \mapsto 0,5^x \quad ; \quad x \mapsto 0,8^x \quad ; \quad x \mapsto 0,95^x$$

Exercice 13 (voir [réponses et correction](#))

Le tableau ci-dessous donne le nombre d'habitants P_n d'un ville, exprimé en millions, pour l'année $2000+n$

Année	2000	2001	2002	2003	2004
rang de l'année n	0	1	2	3	4
Nombre d'habitants P_n	1	1,07	1,15	1,23	1,31

1°) Donner, pour chacune des années 2001 à 2004, le pourcentage d'augmentation du nombre d'habitants par rapport à l'année précédente.

2°) On considère la suite (u_n) définie par $u_n = e^{n \ln 1,07}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Donner, à 10^{-2} près, des valeurs approchées de u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 .

On admettra que u_n est une bonne approximation de P_n pour les années suivantes.

Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.

3°) Justifier que la suite (u_n) est croissante.

4°) Démontrer que les points de coordonnées $(n ; u_n)$ se trouvent sur la courbe d'équation $y = 1,07^x$.

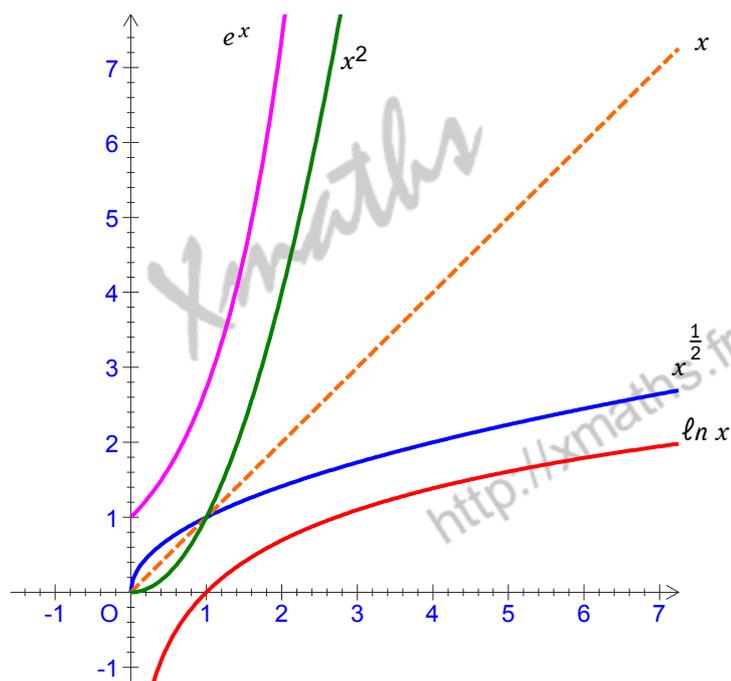
Tracer cette courbe pour $x \in [0 ; +\infty[$ dans un repère orthogonal d'unités 1 cm sur (Ox) et 5 cm sur (Oy) .

5°) En quelle année peut-on estimer que le nombre d'habitants de la ville aura triplé par rapport à 2000 ?

6°) On qualifie la croissance de la population de "croissance exponentielle", pourquoi ?

III Croissances comparées

Courbes représentatives



Propriété (admise)

Soit n un entier naturel non nul. On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$$

On peut traduire ces résultats par :

Lorsque x tend vers $+\infty$, toute puissance de x l'emporte sur le logarithme népérien de x .

Lorsque x tend vers $+\infty$, l'exponentielle de x l'emporte sur toute puissance de x .

Lorsque x tend vers $+\infty$, l'exponentielle de x l'emporte sur le logarithme népérien de x .

Propriété (admise)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

Exercice 14 (voir [réponses et correction](#))

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2 + x} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^2} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2}$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + x} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(x+1)^2} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1}}{x^2}$$

Exercice 15 (voir [réponses et correction](#))

Pour un achat immobilier, lorsqu'une personne emprunte une somme de 50 000 euros, remboursable par n mensualités chacune égale à A euros, pour un intérêt mensuel de 0,4%, le montant de cette mensualité est donné par : $A = \frac{200}{1 - (1,004)^{-n}}$ (on ne demande pas d'établir cette relation).

1°) Calculer la mensualité A lorsque cette personne emprunte 50 000 euros remboursables par 120 mensualités pour un intérêt mensuel de 0,4%. On donnera une valeur arrondie au centime d'euro.

Calculer alors le montant total des intérêts pour ce prêt.

2°) Mêmes questions avec un emprunt de 50 000 euros sur 8 ans à 0,4% mensuel.

3°) Afin de payer le moins d'intérêts possible, l'emprunteur doit augmenter le montant de la mensualité et diminuer la période de remboursement. Mais il ne peut supporter au maximum que des remboursements de 950 euros par mois.

a) Résoudre dans $[0 ; +\infty[$ l'inéquation $\frac{200}{1 - (1,004)^{-n}} \leq 950$

b) En déduire le nombre entier n minimum de mensualités pour lequel le montant de la mensualité A est inférieur ou égal à 950 euros.

Que vaut alors A arrondi au centime d'euro ? Calculer dans ce cas le montant total des intérêts.

Exercice 16 (voir [réponses et correction](#))

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$

1°) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. En déduire que la courbe de f a une asymptote que l'on précisera.

2°) Calculer la dérivée de f et étudier son signe.

3°) Justifier que f a sur $[0 ; +\infty[$ un maximum M et que $M = \frac{4}{(e \ln 2)^2}$

4°) Donner le tableau de variation de f et tracer la courbe (\mathcal{C}) représentative de f .

5°) Justifier que l'équation $f(x) = 1$ a exactement 3 solutions dont 2 sont positives. Déterminer les valeurs exactes des 2 solutions positives et une valeur approchée à 10^{-2} près de la solution négative.

6°) Calculer la dérivée de la fonction h définie par : $h(x) = \left[\frac{x^2}{\ln 2} + \frac{2x}{(\ln 2)^2} + \frac{2}{(\ln 2)^3} \right] 2^{-x}$

En déduire une primitive de f .

7°) Déterminer l'aire, en unités d'aire, de la portion du plan limitée par la courbe (\mathcal{C}), l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.