# HOMOTHÉTIES - TRANSLATIONS - ROTATIONS

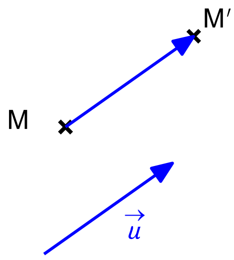
## I Définitions – Propriétés

### Définition

On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ , l'application qui à un point M associe l'unique point M′ tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

On la note souvent $t_{\vec{u}}$ (ou simplement $t$ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible).

Le point M′, image du point M par $t_{\vec{u}}$ est noté $M' = t_{\vec{u}}(M)$.




*Remarques*

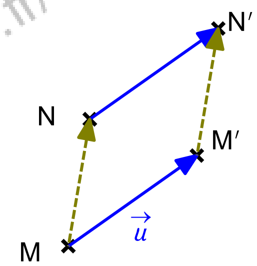
- La translation de vecteur nul est l'application identique (c'est-à-dire l'application qui à un point M associe le point M lui-même).
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, la translation de vecteur $\vec{u}$ , n'a aucun point invariant, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun point M tel que $t_{\vec{u}}(M) = M$.
- Si la translation de vecteur $\vec{u}$ associe à un point M le point M′, alors l'application qui à M′ associe M est la translation de vecteur $-\vec{u}$ .

  On dit que la translation de vecteur $\vec{u}$ a pour réciproque la translation de vecteur $-\vec{u}$ .

### Propriété (voir démonstration 01)

Soient M et N deux points et soient M′ et N′ leurs images par la translation de vecteur $\vec{u}$ .

On a $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$



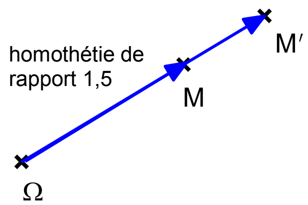

### Définition

Soit $\Omega$ un point et $k$ un réel non nul.

On appelle homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $k$ , l'application qui à un point M associe l'unique point M′ tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$

On la note souvent $h(\Omega;k)$ (ou simplement $h$ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible).

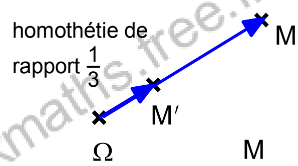
Le point M′, image du point M par $h$ pourra être noté $M' = h(M)$.

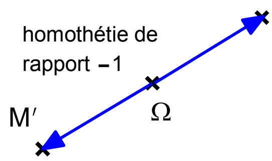



*Remarques*

- L'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport 1 est l'application identique (c'est-à-dire l'application qui à un point M associe le point M lui-même)
- L'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $-1$ est la symétrie centrale de centre $\Omega$.
- Si $k \neq 1$, l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $k$ a pour seul point invariant, le point $\Omega$ . On a alors $h(\Omega) = \Omega$ .
- Si l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $k$ associe à un point M le point M′, alors l'application qui à M′ associe M est l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $\frac{1}{k}$.

  On dit que l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $k$ a pour réciproque l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $\frac{1}{k}$



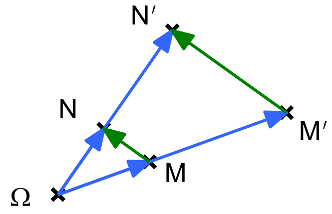
## Propriété (voir démonstration 02)

Si M′ est l'image de M par l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $k$, alors les points $\Omega$ , M et M′ sont alignés.

## Propriété (voir démonstration 03)

Soient M et N deux points et soient M′ et N′ leurs images par l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $k$.

On a $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$

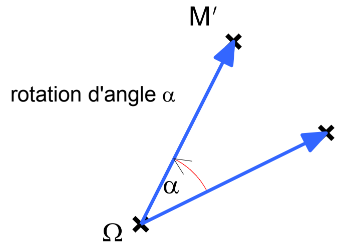



## Définition

Soit $\Omega$ un point et $\alpha$ un réel.
On appelle rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\alpha$, l'application qui à un point M associe l'unique point M′ tel que

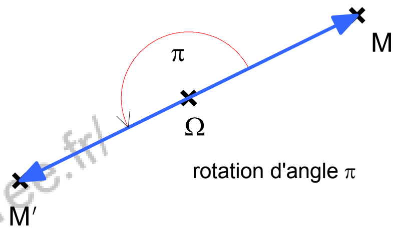
$$\Omega M' = \Omega M \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha \quad \text{modulo } 2\pi$$

On la note souvent $r(\Omega;\alpha)$ (ou simplement $r$ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible).
Le point M′, image du point M par $r$ pourra être noté $M' = r(M)$.




*Remarques*

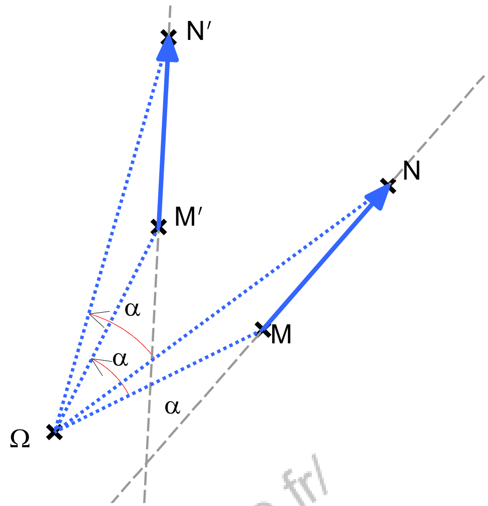
- La rotation de centre $\Omega$ et d'angle $0$ $[2\pi]$ est l'application identique (c'est-à-dire l'application qui à un point M associe le point M lui-même)
- La rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\pi$ $[2\pi]$ est la symétrie centrale de centre $\Omega$.
- Si $\alpha \neq 0$ $[2\pi]$, la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\alpha$ a pour seul point invariant, le point $\Omega$ . On a alors $r(\Omega) = \Omega$ .
- Si la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\alpha$ associe à un point M le point M′, alors l'application qui à M′ associe M est la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $-\alpha$.
  On dit que la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\alpha$ a pour réciproque la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $-\alpha$




## Propriété (admise )

Soient M et N deux points et soient M′ et N′ leurs images par la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\alpha$.

On a $M'N' = MN$ et $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{M'N'}) = \alpha$ $[2\pi]$




### Exercice 01 (voir réponses et correction)

On considère un parallélogramme ABCD de centre O.
Soient I, J, K, L les milieux respectifs des segments [AB] ; [BC] ; [CD] ; [DA].
Soit $t$ la translation transformant A en I.
Déterminer les images par $t$ de I ; D ; K ; L ; O (Justifier)

### Exercice 02 (voir réponses et correction)

Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ . Soit $\vec{u}(a\,;b)$ et $M(x\,;y)$.
Déterminer, en fonction de $x$ et $y$, les coordonnées du point M′ image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ .

### Exercice 03 (voir réponses et correction)

Soit ABC un triangle et A′ , B′ et C′ les milieux respectifs de [BC] , [AC] et [AB].
Démontrer qu'il existe une homothétie, dont on donnera les éléments caractéristiques, qui transforme A en A′, B en B′ et C en C′.

### Exercice 04 (voir réponses et correction)

Les points A, B et C sont tels que A est barycentre de (B ; 3) et (C ; 1). Justifier que :
C est l'image de B par une homothétie de centre A dont on déterminera le rapport ;
B est l'image de C par une homothétie de centre A dont on déterminera le rapport ;
C est l'image de A par une homothétie de centre B dont on déterminera le rapport ;
A est l'image de B par une homothétie de centre C dont on déterminera le rapport ;

### Exercice 05 (voir réponses et correction)

Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit $k$ un réel non nul, $\Omega(a\,;b)$ et $M(x\,;y)$.
Déterminer, en fonction de $x$ et $y$, les coordonnées du point M′ image de M par l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $k$.

### Exercice 06 (voir réponses et correction)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit $\alpha$ un réel et soit $M(x\,;y)$.
Déterminer les coordonnées du point M′ image de M par la rotation de centre O et d'angle $\alpha$. (On pourra passer par des coordonnées polaires)

### Exercice 07 (voir réponses et correction)

Soit ABC un triangle isocèle rectangle direct en A.
1°) Justifier que C est l'image de B par une rotation de centre A que l'on déterminera.
2°) Soient A′ , B′ et C′ les milieux respectifs de [BC] , [AC] et [AB].
Justifier que C′ est l'image de B′ par une rotation de centre A′ que l'on déterminera.
3°) Soit G le centre de gravité du triangle ABC.
Démontrer que C est l'image de B par une rotation de centre G.
Donner une valeur approchée de l'angle $\alpha$ de cette rotation. Vérifier en utilisant le logiciel GeoGebra.

## II Actions sur les configurations élémentaires

### Exercice 08 (voir réponses et correction)

On considère trois points A, B et C alignés et deux à deux distincts.

1°) Justifier qu'il existe un réel $\lambda$ tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$.
2°) Soient A′, B′ et C′ les images de A, B et C par une translation $t$.

Démontrer que : $\overrightarrow{A'C'} = \lambda\,\overrightarrow{A'B'}$. Que peut-on en conclure pour les points A′, B′ et C′ ?
3°) Soient A″, B″ et C″ les images de A, B et C par une homothétie $h$.
Démontrer que les points A″, B″ et C″ sont alignés.

### Propriété (voir démonstration 04)

Si A, B, C sont trois points alignés, leurs images A′, B′, C′ par une translation $t$ ou par une homothétie $h$ ou par une rotation $r$ sont des points alignés.
On dit qu'une translation, une homothétie et une rotation conservent l'alignement.

### Propriété (voir démonstration 05)

Par une translation $t$ :
- l'image d'une droite (AB) est la droite (A′B′) avec $A' = t(A)$ et $B' = t(B)$.
- l'image d'une droite (d) est une droite (d′) parallèle à (d).
- l'image d'une droite (d) passant par A est la droite (d′) parallèle à (d) et passant par $A' = t(A)$.

Par une homothétie $h$ :
- l'image d'une droite (AB) est la droite (A′B′) avec $A' = h(A)$ et $B' = h(B)$.
- l'image d'une droite (d) est une droite (d′) parallèle à (d).
- l'image d'une droite (d) passant par A est la droite (d′) parallèle à (d) et passant par $A' = h(A)$.

Par une rotation $r$ :
- l'image d'une droite (AB) est la droite (A′B′) avec $A' = r(A)$ et $B' = r(B)$.
- l'image d'une droite (d) passant par A est une droite (d′) passant par $A' = r(A)$.
(l'angle que forment les droites d et d′ est égal à l'angle de la rotation)

## Exercice 09 (voir réponses et correction)

Soient A et B deux points, G le barycentre de (A ; $\alpha$) et (B ; $\beta$) (avec $\alpha + \beta \neq 0$).

1°) Démontrer que si $t$ est une translation alors $t$(G) est le barycentre de ($t$(A) ; $\alpha$) et ($t$(B) ; $\beta$).

2°) Démontrer que si $h$ est une homothétie alors $h$(G) est le barycentre de ($h$(A) ; $\alpha$) et ($h$(B) ; $\beta$).

### Propriété (voir démonstration 06)

Soient A et B deux points, G le barycentre de (A ; $\alpha$) et (B ; $\beta$) (avec $\alpha + \beta \neq 0$).
Si A′, B′ et G′ sont les images respectives de A, B et G par une translation $t$ ou par une homothétie $h$ ou par une rotation $r$, alors G′ est le barycentre de (A′ ; $\alpha$) et (B′ ; $\beta$).
On dit qu'une translation, une homothétie et une rotation conservent le barycentre.

*Remarques*

En particulier une translation, une homothétie et une rotation conservent le milieu.
La propriété se généralise au barycentre de 3 ; 4 ; ... ; $n$ points pondérés.

### Propriété (voir démonstration 07)

Soient A et B deux points distincts, A′ et B′ leurs images respectives par une translation $t$ ou par une homothétie $h$ ou par une rotation $r$.
L'image du segment [AB] par la translation $t$ ou par l'homothétie $h$ ou par la rotation $r$, est le segment [A′B′].

### Propriété (voir démonstration 08)

Soient A, B, C trois points deux à deux distincts, et A′, B′, C′ leurs images respectives par une translation $t$ ou par une homothétie $h$ ou par une rotation $r$.

On a $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$

On dit qu'une translation, une homothétie et une rotation conservent les angles (orientés).

*Remarque*

Si A, B, C, D sont quatre points distincts et A′, B′, C′, D′ leurs images par une translation ou par une homothétie ou par un rotation, on a $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'})$ .

Le résultat peut se démontrer en notant que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) + \pi$

### Propriété (voir démonstration 09)

Une translation, une homothétie et une rotation conservent les angles géométriques, le parallélisme, l'orthogonalité.

### Propriété (voir démonstration 10)

Une translation et une rotation conservent les longueurs et les aires.
Une homothétie de rapport $k$ multiplie les longueurs par $|k|$ et les aires par $k^2$.

### Propriété (voir démonstration 11)

Soient O, A, B trois points deux à deux distincts, et O′, A′, B′ leurs images respectives par une translation $t$ ou par une homothétie $h$ ou par une rotation $r$.

Par la translation $t$ ou la rotation $r$ :
 l'image du cercle de centre O et de rayon R est le cercle de centre O′ et de rayon R.

Par l'homothétie $h$ de rapport $k$ :
 l'image du cercle de centre O et de rayon R est le cercle de centre O′ et de rayon $|k|$ R.

Par la translation $t$, l'homothétie $h$ ou la rotation $r$ :
 l'image du cercle de diamètre [AB] est le cercle de diamètre [A′B′].
 l'image du cercle de centre O passant par A est le cercle de centre O′ passant par A′.

## Exercice 10 (voir réponses et correction)

Soit ABC un triangle, A′, B′ et C′ les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB].

1°) Démontrer qu'il existe une homothétie $h$ de centre C transformant B en A′ et A en B′.
Donner, en fonction de l'aire du triangle ABC, l'aire du triangle A′B′C.

2°) Donner, en fonction de l'aire du triangle ABC, les aires des triangles AB′C′ et A′BC′.

3°) Déduire des questions précédentes que l'aire du triangle A′B′C′ est le quart de l'aire du triangle ABC.
Retrouver ce résultat en utilisant une homothétie.

## Exercice 11 (voir réponses et correction)

On considère deux points distincts A et B.
Pour tout point M du plan, soit I le milieu de [AM] et G le barycentre de (A ; −1) ; (B ; 2) et (M ; 1).

1°) Faire une figure.

2°) Démontrer que I est l'image de M par une transformation du plan à déterminer
Démontrer que G est l'image de I par une transformation du plan à déterminer.

3°) En déduire :
- le lieu des points I lorsque M décrit le cercle de diamètre [AB] ;
- le lieu des points G lorsque M décrit le cercle de diamètre [AB] ;
- le lieu des points I lorsque M décrit la droite perpendiculaire à (AB) en B ;
- le lieu des points G lorsque M décrit la droite perpendiculaire à (AB) en B ;

## Exercice 12 (voir réponses et correction)

Soient A et B deux points distincts, I le milieu de [AB].
Soit (d) la médiatrice de [AB].
Soit (C) le cercle de centre A et de rayon AI et (C′) le cercle de diamètre [AB].
À tout point M on associe le point M′ barycentre de (A ; −1) et (M ; 2).
Déterminer le lieu géométrique de M′ lorsque M décrit :

- la droite (AB)
- la droite (d)
- le cercle (C)
- le cercle (C′)

## Exercice 13 (voir réponses et correction)

Soit ABC un triangle, A′, B′ et C′ les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB].

À tout point M on associe le point $f$(M) = M′ défini par : $\overrightarrow{MM'} = k\,\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$ .

1°) Montrer que si $k = \frac{1}{2}$ , l'application $f$ est une homothétie dont le centre est le centre de gravité du triangle ABC et dont on déterminera le rapport. Quelle est l'image par cette homothétie du triangle ABC ?

2°) Montrer que si $k = -1$, l'application $f$ est une translation dont on donnera le vecteur.

3°) Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'application $f$ lorsque $k \neq -1$.

## Exercice 14 (voir réponses et correction)

On considère un parallélogramme ABCD. Soit I le milieu de [CD], J le point d'intersection des droites (BI) et (AC) et K le point d'intersection des droites (AI) et (BD).

1°) Que représente J pour le triangle BCD ?

2°) Déterminer une homothétie transformant (JK) en (AB).

3°) Justifier que (JK) est parallèle à (AB).

4°) Que représente l'aire du triangle (IJK) par rapport à l'aire du parallélogramme ?

## Exercice 15 (voir réponses et correction)

On considère un trapèze ABCD de bases [AB] et [CD].
Soit O le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD).

1°) Justifier qu'il existe un réel $k$ non nul tel que $\overrightarrow{OC} = k\,\overrightarrow{OA}$ .

2°) Soit $h$ l'homothétie de centre O et de rapport $k$. Déterminer A′ = $h$(A).

3°) Soit B′ = $h$(B). Justifier que B′ ∈ (CD). En déduire que B′ = D.

4°) Soient I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD].
En utilisant l'homothétie $h$, démontrer que O, I et J sont alignés.

5°) On suppose dans cette question que ABCD n'est pas un parallélogramme.
Soit O′ le point d'intersection de (AD) et (BC).
a) Démontrer que O′, I et J sont alignés.
b) En déduire le théorème suivant :
Dans un trapèze qui n'est pas un parallélogramme, les milieux des cotés parallèles, le point de concours des diagonales et le point de concours des cotés non parallèles sont alignés.